

TD 4 : Trigonométrie Indications

Identités trigonométriques

1 ★★

- 1) En utilisant le fait que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$, calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$.
- 2) En utilisant le fait que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, montrer que $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$, puis calculer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

- 1) Utiliser les formules $\cos(a - b)$ avec $a = \frac{\pi}{3}$ et $b = \frac{\pi}{4}$
- 2) Utiliser les formules de $\tan(2x)$, $\cos(2x)$, $\sin(2x)$, etc.

2 ★★

- 1) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$$\cos(3\theta) = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$$
- 2) En déduire que $\cos \frac{\pi}{9}$ est solution de l'équation suivante : $8x^3 - 6x - 1 = 0$.
- 3) On pose $f : x \mapsto \cos^3 x$. Quelle est la dérivée 4-ième de f ?

Écrire $3\theta = 2\theta + \theta$

(In)équations trigonométriques

3 ★★ Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- 1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2) $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$
- 3) $2\cos^2 x + \cos(2x) = 2$
- 4) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 5) $\tan x = \tan(2x)$
- 6) $\sin x = \tan x$

Exploiter des formules de trigonométrie pour se retrouver avec une équation qu'on sait résoudre.

4 ★★★ Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- 1) $\sin(2x) \geq \frac{1}{2}$
- 2) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) > \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3) $-\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 4) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) < 0$

Utiliser la méthode vue en cours !

Pour la 3), résoudre les deux inégalités séparément et obtenir des ensembles de solutions $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de cette manière. Que vaut l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ en fonction de $\mathcal{S}_1$ et de $\mathcal{S}_2$?

5 ★★★ Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

- 1) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$
- 2) $\cos x - \sin x = 1$
- 3) $\sqrt{3}(1 + \sin x) = \cos x$
- 4) $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Réécrire l'expression pour faire apparaître une expression d'une formule d'addition, par exemple $\cos a \cos b \pm \sin a \sin b$